



Formeln zur Berechnung der
hocheffizienten Windturbine
(HE-WT)



Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Anlagenleistung	3
3 Windgeschwindigkeit	4
4 Statischer Auftrieb	5
5 Dynamischer Auftrieb	7
6 Drehmoment	10
7 Zugkraft im Halteseil	12
8 Energieübertragung	13



1 Einleitung

In diesem Dokument werden die wichtigsten Formeln zur Berechnung einer HE-WT Anlage aufgeführt.

2 Anlagenleistung

Die mechanische Leistung, die eine Anlage aus der Windenergie umwandeln kann ergibt sich aus dem Betz'schen Gesetz:

$$P_{Nutz} = \frac{1}{2} * \rho * A * v^3 * 0,593$$

P_{Nutz} ist die mechanische Leistung, die ein Rotor an die nachgeschalteten Komponenten wie Getriebe oder Generator abgeben kann.

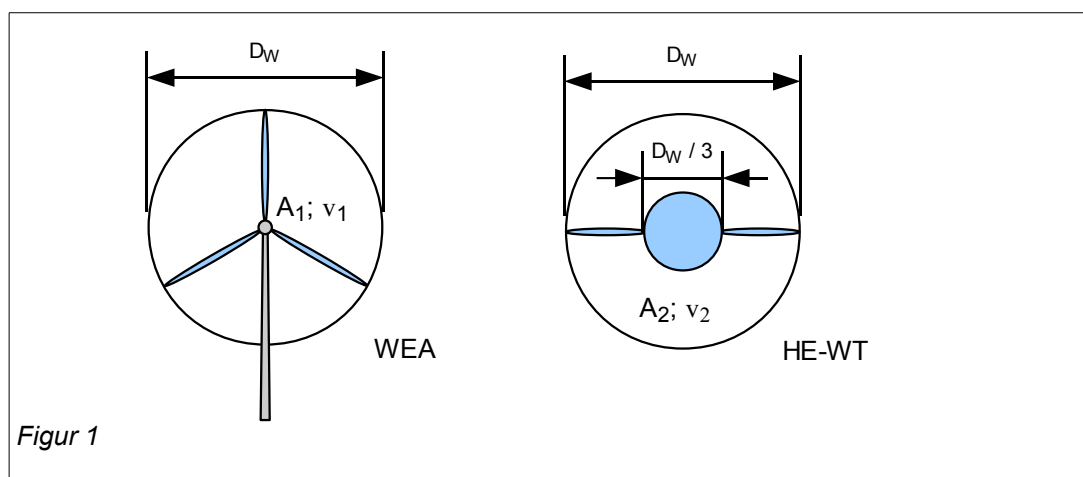
ρ ist die Luftdichte in der sich der Rotor dreht. Die Luftdichte gibt an, welche Masse in einem bestimmten Volumen vorhanden ist. Die Luftdichte selbst ist von den Faktoren Luftfeuchte, Temperatur und Luftdruck abhängig. Die Luftdichte hat am Boden die größte Dichte und nimmt mit steigender Höhe ab. Die Luftdichte schwankt in dem Bereich von 0 m bis 1.000 m zwischen 1,0 kg/m³ und 1,4 kg/m³.

A ist die durchströmte Fläche. Bei einer herkömmlichen Windenergieanlage als auch bei der hocheffizienten Windenergieanlage ergibt sich eine Kreisfläche, die wie folgt berechnet wird:

$$A = \frac{\pi * d^2}{4} \text{ wobei } d \text{ der Durchmesser (D}_W\text{) der Kreisfläche ist.}$$

v ist die Windgeschwindigkeit. Man beachte, dass die Windgeschwindigkeit mit der dritten Potenz in die Formel eingeht.

0,593 ist der Betzsche Leistungsbeiwert. Dieser besagt, dass nicht mehr 59,3 % der Windenergie entzogen werden kann. Würde man versuchen die gesamte Energie dem Wind zu entziehen, so wäre die Windgeschwindigkeit hinter dem Rotor gleich Null und der Wind würde sich vor der Anlage aufstauen und dem Rotor ausweichen.





Die mechanische Leistung ist jedoch nicht gleich der elektrischen Leistung. Reibungsverluste im Getriebe und in dem Generator werden in Wärme umgewandelt und an die Umgebung abgeführt. Man spricht von dem Wirkungsgrad η der sich wie folgt berechnet:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

P_{zu} ist die zugeführte Leistung; also P_{nutz} .

P_{ab} ist die abgeführte Leistung; also die elektrische Leistung.

Der Wirkungsgrad η beträgt circa 0,9 und reduziert damit den Ertrag um 10%.

3 Windgeschwindigkeit

Es ist bekannt, dass in größeren Höhen die Windgeschwindigkeit höher ist, stetiger weht und es weniger Turbulenzen gibt. Wie in dem Kapitel 2 *Anlagenleistung* bereits beschrieben, geht die Windgeschwindigkeit mit der dritten Potenz in die Formel zur Leistungsberechnung ein und ist damit der entscheidende Faktor wie viel Energie dem Rotor zugeführt wird.

Zur Berechnung der Windgeschwindigkeit in größeren Höhen wird die Rauigkeitslänge z_0 verwendet. Die Rauigkeitslänge hängt von der Geländeoberfläche ab. Folgende Tabelle zeigt die Werte in Abhängigkeit zum Geländetyp:

Rauigkeitslänge z_0 in Meter	Geländetyp
0,0002	Wasserflächen : Meer und Seen
0,0024	Offenes Gelände mit glatter Oberfläche, z.B. Beton, Landebahnen auf Flughäfen, gemähtes Gras etc.
0,0300	Offenes landwirtschaftliches Gelände ohne Zäune und Hecken, evtl. mit weitläufig verstreuten Gebäuden und sehr sanfte Hügel.
0,0550	Landwirtschaftliches Gelände mit einigen Häusern und 8 m hohen Hecken im Abstand von mehr als 1 km
0,1000	Landwirtschaftliches Gelände mit einigen Häusern und 8 Meter hohen Hecken im Abstand von ca. 500 m
0,2000	Landwirtschaftliches Gelände mit vielen Häusern, Büschen und Pflanzen, oder 8 m hohe Hecken im Abstand von ca. 250 m
0,4000	Dörfer, Kleinstädte, landwirtschaftliches Gelände mit vielen oder hohen Hecken, Wäldern und sehr raues und unebenes Terrain.
0,6000	Größere Städte mit hohen Gebäuden.
1,6000	Großstädte mit hohen Gebäuden und Wolkenkratzern.



Die Näherungsformel (logarithmische Windprofil) zur Berechnung der Windgeschwindigkeit in größeren Höhen gibt an, welche Windgeschwindigkeit in der Höhe h_2 erwartet werden kann, wenn die Windgeschwindigkeit in der Höhe h_1 bekannt ist.

$$v_2 = v_1 * \frac{\ln\left(\frac{h_2}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{z_0}\right)}$$

Das logarithmische Windprofil ist nur in der Prandtl-Schicht (0m bis 100m) gültig, weil hier die Drehung des Windes mit der Höhe auf Grund der Corioliskraft vernachlässigt werden kann.

Das Meteorologische Institut der Universität Hamburg betreibt im Stadtteil Billwerder am Sendemast des NDR eine wissenschaftliche Messanlage zur Erforschung der Vorgänge in der atmosphärischen Grenzschicht. Es sind in fünf verschiedenen Höhen Messgeräte installiert, die höchste Messstation liegt 250 m über dem Boden. Das Institut stellt auf der Internetseite www.wettermast-hamburg.zmaw.de 8-Tage-Zeitreihen der gemessenen meteorologischen Daten zur Verfügung.

4 Statischer Auftrieb

Der Tragkörper mit dem Rotor schwebt nach dem leichter-als-Luft Prinzip in der Atmosphäre.

Das Gesetz des Archimedes besagt, dass die Auftriebskraft so groß ist wie das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit bzw. des verdrängten Gases. Ein Körper schwebt, wenn die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft ist.

$$\text{Auftriebskraft } F_A = \text{Gewichtskraft } F_G$$

Die Auftriebskraft gilt:

$$F_A = \rho * V * g$$

- ρ ist die Dichte des Mediums in dem der Körper schwebt (Luftdichte).
- V ist das verdrängte Volumen. Hiermit ist das Volumen der Gaszellen gemeint.
- g ist der Proportionalitätsfaktor (Erdschwerebeschleunigung) und beträgt an der Erdoberfläche im Mittel 9,81 m/s².

Mit der Formel für die Auftriebskraft lässt sich das Volumen der Gaszellen bestimmen, wenn die Massen m zur Berechnung der Gewichtskraft bekannt sind.

$$F_G = m * g$$



Die Gewichtskraft des Traggases wird wie folgt berücksichtigt:

$$\rho_{Luft} * V * g = m * g + \rho_{Traggas} * V * g$$

Nach Umstellung der Formel ergibt sich das Volumen der Gaszellen:

$$V = \frac{m}{\rho_{Luft} - \rho_{Traggas}}$$

- m ist die Summe aller Massen, die an der schwebenden Komponente befestigt sind. Hierzu gehören: die Gaszellenhülle, der Außenhülle, der Kiel, der Rotor, das Getriebe, der Generator und das Halteseil.
- ρ_{Luft} ist die Dichte der Luft. Die Luftdichte schwankt je nach Luftdruck und Temperatur. Der Auftrieb ist am geringsten, wenn die Luftdichte am kleinsten ist. Aus diesem Grund muss für die Auslegung des Gaszellenvolumens mit der kleinsten Luftdichte gerechnet werden.
- $\rho_{Traggas}$ als Traggas wird Helium oder Wasserstoff eingesetzt. Helium hat eine Dichte von 0,178 kg/m³ und Wasserstoff hat eine Dichte von 0,089 kg/m³. Wasserstoff ist somit nur halb so schwer wie Helium.

5 Dynamischer Auftrieb

Die Anlage setzt dem Wind einen Widerstand entgegen. Dieser Widerstand wird durch die Widerstandskraft F_W ausgedrückt. Diese Kraft muss durch zusätzlichen Auftrieb kompensiert werden, damit die Anlage nicht zu Boden gedrückt wird. Die Formel für die Widerstandskraft enthält den Widerstandsbeiwert c_W , der von der Formgebung der Anlage abhängig ist.

$$F_W = c_W * \frac{\rho_{Luft}}{2} * A_W * v^2$$

- c_W ist der Widerstandsbeiwert. Die Bestimmung des Widerstandsbeiwerts erfolgt empirisch. Das heißt, dass dieser Wert durch Messungen ermittelt wird. Typische c_W -Werte sind:

Wert	Gegenstand
0,05	Stromlinienform, Tropfenform
0,08	Tragfläche eines Flugzeuges
0,3	Geschlossener PKW
0,45	Kugel
0,8	Lastkraftwagen
1,1	Gebäude Wand



ρ_{Luft} ist die Luftdichte.

A_W ist die Fläche, die dem Wind entgegensteht.

v ist die Windgeschwindigkeit. Die Widerstandskraft nimmt quadratisch mit der Windgeschwindigkeit zu.

Die Windwiderstandskraft wird durch die Auftriebskraft F_A weitgehend kompensiert, welche durch die Tragflächen erzeugt wird. Die Formel für die Auftriebskraft beinhaltet den Auftriebsbeiwert c_A . Dieser Auftriebsbeiwert ist ebenfalls von der Formgebung abhängig und wird wie der Windwiderstandsbeiwert experimentell ermittelt.

$$F_A = c_A * \frac{\rho_{Luft}}{2} * A_T * v^2$$

c_A ist der Auftriebsbeiwert. Die Bestimmung des Auftriebsbeiwerts erfolgt empirisch. Das heißt, dass dieser Wert durch Messungen ermittelt wird. Dieser Wert ist jedoch von dem Anstellwinkel der Tragflächen abhängig und wird in einem Polardiagramm dargestellt. Typische Werte für den c_A -Wert bei Auftrieb sind:

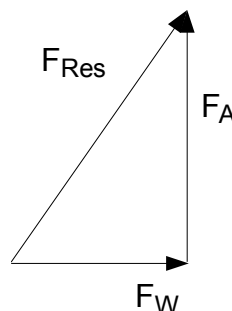
Wert	Gegenstand
0,6	Drachenfläche
0,8	Tragfläche eines Flugzeuges bei Geradeausflug
1,5	Tragfläche eines Flugzeuges maximaler Steigung

ρ_{Luft} ist die Luftdichte.

A_T ist die Fläche, die für den Auftrieb sorgt (Tragfläche).

v ist die Windgeschwindigkeit.

Die Auftriebskraft steht senkrecht zur Widerstandskraft. Hieraus ergibt sich die resultierende Kraft F_{Res} , die das Halteseil aufbringen muss.





Aus dem rechtwinkligen Kraftdreieck kann die Fläche bestimmt werden, die notwendig ist um die Anlage in der Höhe zu stabilisieren.

Die Auftriebskraft setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Zum einen durch die Auftriebskraft die durch den statischen Auftrieb erzeugt wird (notwendig bei Windstille) und zum anderen durch den dynamischen Auftrieb.

Die resultierende Kraft F_{Res} korrespondiert mit der Länge des Halteseils und die Auftriebs-
tragfläche A_T korrespondiert mit der zulässigen Absenkung der Anlage.

Wenn man von einer zulässigen Absenkung um 20 Prozent ausgeht und die statische Auftriebskraft nicht berücksichtigt ergibt sich die folgende Herleitung für die Auftriebs-
tragfläche A_T .

$$F_A = F_{Res} - \frac{F_{Res}}{5} = F_{Res} * \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 0,8 * F_{Res}$$

Mit dem Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt sich für F_W :

$$F_W = \sqrt{F_{Res}^2 - F_A^2} = \sqrt{F_{Res}^2 - (0,8 * F_{Res})^2} = 0,6 * F_{Res}$$

mit $\frac{F_A}{F_W} = \frac{0,8 * F_{Res}}{0,6 * F_{Res}} = 1,33$ folgt $F_A = 1,33 * F_W$

mit den Formeln für F_A und F_W ergibt sich:

$$c_A * \frac{\rho_{Luft}}{2} * A_T * v^2 = 1,33 * c_W * \frac{\rho_{Luft}}{2} * A_W * v^2$$

Umgestellt nach A_T :

$$A_T = 1,33 * \frac{c_W}{c_A} * A_W$$

A_W ist die Fläche, die dem Wind entgegensteht. Näherungsweise kann die Kreis-
fläche des Tragkörpers angesetzt werden (siehe *Kapitel 2 Figur 1*).

Mit einem angenommenen c_W -Wert von 0,1 und einem c_A -Wert von 0,6 ergibt sich eine
Fläche von $0,22 * A_W$.



6 Drehmoment

Durch die Rotation des Rotors entsteht ein Drehmoment M_D . Dieses Drehmoment kann über die Leistung der Anlage berechnet werden:

$$M_D = \frac{P_{Nutz}}{\omega} = \frac{P_{Nutz}}{2 * \pi * n}$$

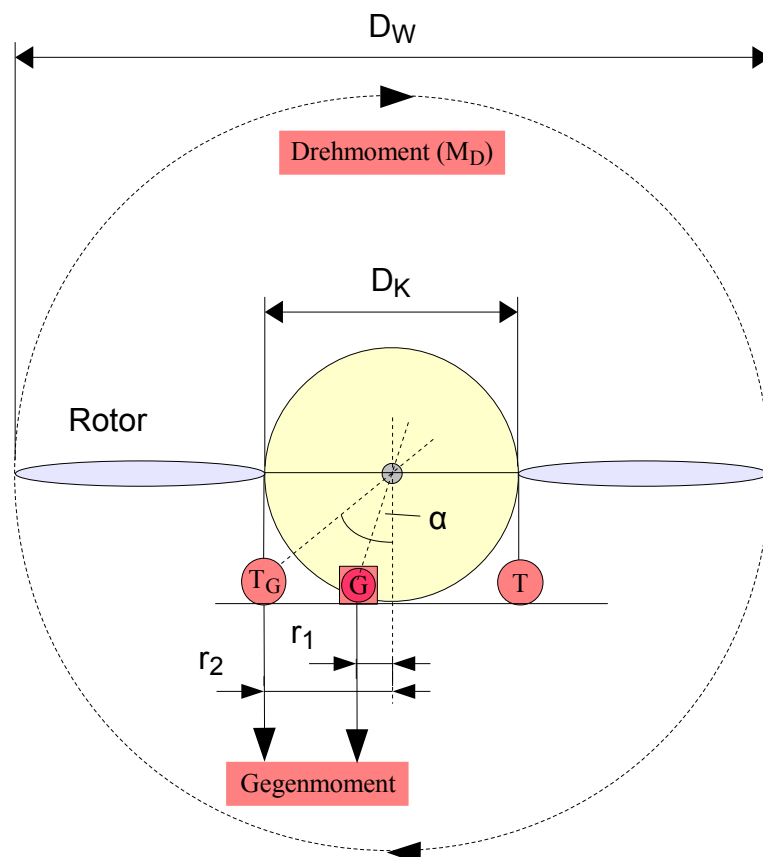
n ist die Drehzahl des Rotors. Bei 20 Umdrehungen pro Minute ergibt sich n zu 0,33 1/s.

Das Drehmoment M_D wird durch das Gegenmoment M_G kompensiert.

Funktion:

Das Drehmoment wird durch Ballastwasser kompensiert, welches in Abhängigkeit von dem Schieflagenwinkel von der einen Seite (T) zur gegenüberliegenden Seite (TG) gepumpt wird.

Die Generatormasse (G) wird in der Momentberechnung mit einbezogen.



Figur 2



Hieraus folgt:

$$M_G = \text{Generatormasse} * g * r_1 + \text{Ballastwassermasse} * g * r_2$$

g ist der Proportionalitätsfaktor (Erdschwerebeschleunigung) und beträgt an der Erdoberfläche im Mittel $9,81 \text{ m/s}^2$.

r_1, r_2 ist der Abstand zur Rotormitte.

Rechenbeispiel:

Die Generatormasse wird mit 50.000 kg angegeben. Die Anlagenleistung beträgt 10 MW , bei 20 Umdrehungen pro Minute. Der Abstand r_1 soll 6 m und der Abstand r_2 soll 30 m betragen.

Fall a) Wie viel Ballastwasser befindet sich in dem Tank T, wenn der Rotor sich nicht dreht?

$$m_{\text{Generator}} * g * r_1 = m_{\text{Ballastwasser}} * g * r_2$$

$$m_{\text{Ballastwasser}} = \frac{50.000 \text{ kg} * 6 \text{ m}}{30 \text{ m}} = 10.000 \text{ kg}$$

Fall b) Wie viel Ballastwasser befindet sich in dem Tank TG, wenn die Anlage die volle Leistung hat?

$$M_D = M_G \frac{P_{\text{Nutz}}}{2 * \pi * n} = m_{\text{Generator}} * g * r_1 + m_{\text{Ballastwasser}} * g * r_2$$

$$m_{\text{Ballastwasser}} = \frac{\frac{P_{\text{Nutz}}}{2 * \pi * n} - m_{\text{Generator}} * g * r_1}{g * r_2}$$

$$m_{\text{Ballastwasser}} = \frac{\frac{10.000.000 \text{ W}}{2 * \pi * \frac{20}{60 \text{ s}}} - 50.000 \text{ kg} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 6 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 30 \text{ m}} = 6.232 \text{ kg}$$



7 Zugkraft im Halteseil

Wie im *Kapitel 5* bereits angedeutet wird die Zugkraft im Halteseil nach dem Kräfte-dreieck berechnet. Die resultierende Zugkraft ergibt sich aus der Wurzel der Summe der Kathetenquadrate:

$$F_{Res} = \sqrt{F_W^2 + F_A^2}$$

mit den bereits bekannten Formeln für F_A und F_W ergibt sich:

$$F_{Res} = \frac{\rho_{Luft}}{2} * v^2 * \sqrt{(c_A * A_T)^2 + (c_W * A_W)^2}$$

mit der Formel $A_T = 1,33 * \frac{c_W}{c_A} * A_W$ aus *Kapitel 5*:

$$F_{Res} = \frac{\rho_{Luft}}{2} * v^2 * \sqrt{(1,33 * c_W * A_W)^2 + (c_W * A_W)^2} = \frac{\rho_{Luft}}{2} * v^2 * c_W * A_W * \sqrt{1,33^2 + 1^2}$$

$$F_{Res} = \frac{\rho_{Luft}}{2} * v^2 * c_W * A_W * 1,66 = 0,83 * \rho_{Luft} * c_W * A_W * v^2$$

Die Zugfestigkeit ist definiert als Kraft pro Fläche [N/mm²]. Die Zugfestigkeit einer hochfesten Polyethylen-Faser (z. B. Dyneema) beträgt 2.000 N/mm². Mit den folgenden Werten kann der Durchmesser des Halteseils d_{Seil} berechnet werden.

$$\begin{aligned}\rho_{Luft} &= 1,4 \text{ kg/m}^3 \\ c_W &= 0,1 \\ A_W &= 2826 \text{ m}^2 \text{ (Durchmesser = 60m)} \\ v &= 70 \text{ m/s entspricht 252 km/h}\end{aligned}$$

$$\text{Zugfestigkeit} = \frac{F_{Res}}{A_{Seil}} = 2.000 \text{ N/mm}^2$$

$$d_{Seil} = \sqrt{\frac{4 * A_{Seil}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 * F_{Res}}{\pi * 2.000 \text{ N/mm}^2}} = \sqrt{\frac{4 * 0,83 * \rho_{Luft} * c_W * A_W * v^2}{\pi * 2.000 \text{ N/mm}^2}} = 32 \text{ mm}$$



8 Energieübertragung

Die elektrische Energieübertragung zur Bodenstation erfolgt über Kupferleiter. Die zulässige Stromdichte für einen Kupferleiter beträgt 6 A/mm^2 .

Bei einer Spannung von 6 kV und einer Leistung von 10 MW beträgt die Stromstärke:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{10.000 \text{ kVA}}{6 \text{ kV}} = 1.666 \text{ Ampere} .$$

Der Leitungsquerschnitt für einen Leiter entsprechend:

$$A_{\text{Stromleiter}} = \frac{1666 \text{ A}}{6 \text{ A/mm}^2} = 277 \text{ mm}^2 .$$

Aus dem Querschnitt ergibt sich der Durchmesser eines Leiters:

$$d = \sqrt{\frac{4 * A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 * 277 \text{ mm}^2}{\pi}} = 18,8 \text{ mm} .$$